PROBLEME

Trouver :

$$\begin{array}{r} J\ U\ P\ I\ T\ E\ R \\ +\ S\ A\ T\ U\ R\ N\ E \\ +\ U\ R\ A\ N\ U\ S \\ \hline N\ E\ P\ T\ U\ N\ E \end{array}$$

Sachant qu'à chaque lettre distincte correspond un chiffre différent de 0 à 9 et que (J, S, U, N) $\neq$ 0

SOLUTION

I. Propriété 1^er colonne

R + E + S = E ou **R + E + S = 10 + E** ou **R + E + S = 20 + E**

ces équations impliquent :

soit R + S = 0 *sans retenue sur la 2^ième colonne*
ou R + S = 10 *retenue de 1 sur la 2^ième colonne*
ou R + S = 20 *retenue de 2 sur la 2^ième colonne*

Si R + S = 0 $\rightarrow$ R = -S ce qui est impossible car (R, S) $\in$ [0,9]
Si R + S = 20 $\rightarrow$ R = 20 – S ce qui est impossible car (R, S) $\in$ [0,9]

Donc $\boxed{\mathbf{R + S = 10}}$ *avec une retenue de 1 sur la 2^ième colonne*

II. Propriété 2^ième Colonne

1 + E + N + U = N ou **1 + E + N + U = 10 + N** ou **1 + E + N + U = 20 + N**

ces équations impliquent :

soit 1 + E + U = 0 *sans retenue sur la 3^ième colonne*
ou 1 + E + U = 10 *retenue de 1 sur la 3^ième colonne*
ou 1 + E + U = 20 *retenue de 2 sur la 3^ième colonne*

Si 1 + E + U = 0 $\rightarrow$ E = -(1 + U) ce qui est impossible car (E, U) $\in$ [0,9]
Si 1 + E + U = 20 $\rightarrow$ E = 19 – U ce qui est impossible car (E, U) $\in$ [0,9]

Donc 1 + E + U = 10 ou $\boxed{\mathbf{E + U = 9}}$ *avec une retenue de 1 sur la 3^ième colonne*

$$\begin{array}{r} 1\ \ 1\ \ \ \ \\ J\ U\ P\ I\ T\ E\ R \\ +\ S\ A\ T\ U\ R\ N\ E \\ +\ U\ R\ A\ N\ U\ S \\ \hline N\ E\ P\ T\ U\ N\ E \\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1 \end{array}$$

III. Propriété 3^{ième} Colonne

1 + T + R + N = U Cas où il n'y a aucune retenue sur la 4^{ième} colonne

ou

1 + T + R + N = 10 + U Cas où il y a une retenue de 1 sur la 4^{ième} colonne

ou

1 + T + R + N = 20 + U Cas où il y a une retenue de 2 sur la 4^{ième} colonne

IV. Propriété 5^{ième} Colonne

P + T + R = P

Cette égalité implique 3 équations possibles :

Soit $\boxed{T + R = 10}$ (aucune retenue provenant de la 4^{ième} colonne)

ou $\boxed{T + R = 9}$ (une retenue de 1 provenant de la 4^{ième} colonne)

et $\boxed{T + R = 8}$ (une retenue de 2 provenant de la 4^{ième} colonne)

IV.1 Résolution avec $\boxed{T + R = 10}$

					1	1	
	J	U	P	I	T	E	R
+	S	A	T	U	R	N	E
+		U	R	A	N	U	S
	N	E	P	T	U	N	E
	7	6	5	4	3	2	1

Reprenons l'équation de la 1er colonne $\boxed{R + S = 10}$

Nous obtenons T + R = R + S

Enfin T = S Ce qui est impossible car T et S doivent être différents

IV.2 Résolution avec $\boxed{T + R = 9}$

IV.2.a Reprenons la 1er équation de la 3^{ième} colonne

$$\begin{cases} 1 + T + R + N = U \\ T + R = 9 \end{cases}$$

↳ 1 + 9 + N = U

↳ 10 + N = U impossible car U ∈ [0,9]

			1		1	1	
	J	U	P	I	T	E	R
+	S	A	T	U	R	N	E
+		U	R	A	N	U	S
	N	E	P	T	U	N	E
	7	6	5	4	3	2	1

IV.2.b Reprenons la 2^{ième} équation de la 3^{ième} colonne

			1	1	1	1	
	J	U	P	I	T	E	R
+	S	A	T	U	R	N	E
+		U	R	A	N	U	S
	N	E	P	T	U	N	E
	7	6	5	4	3	2	1

$$\begin{cases} 1 + T + R + N = 10 + U \\ T + R = 9 \end{cases}$$

↳ $1 + 9 + N = 10 + U$

↳ $10 + N = 10 + U$

↳ $N = U$ Ce qui est impossible car N et U doivent être différents

IV.2.c Reprenons la 3^{ième} équation de la 3^{ième} colonne

			1	2	1	1	
	J	U	P	I	T	E	R
+	S	A	T	U	R	N	E
+		U	R	A	N	U	S
	N	E	P	T	U	N	E
	7	6	5	4	3	2	1

$$\begin{cases} 1 + T + R + N = 20 + U \\ T + R = 9 \end{cases}$$

↳ $1 + 9 + N = 20 + U$

↳ $10 + N = 20 + U$

↳ $N = 10 + U$ impossible car $N \in [0,9]$

IV.3 Résolution avec $\boxed{T + R = 8}$

			2		1	1	
	J	U	P	I	T	E	R
+	S	A	T	U	R	N	E
+		U	R	A	N	U	S
	N	E	P	T	U	N	E
	7	6	5	4	3	2	1

IV.3.a Reprenons la 1er équation de la 3^{ième} colonne

$$\begin{cases} 1 + T + R + N = U \\ T + R = 8 \end{cases}$$

↳ $1 + 8 + N = U$

↳ $U = N + 9$

Selon la 2^{ième} colonne nous avons $E + U = 9$

Ainsi $\begin{cases} E + U = 9 \\ U = N + 9 \end{cases}$

et $\begin{cases} E + U = 9 \\ U - N = 9 \end{cases}$

↳ $E + U = U - N$

↳ $E = -N$ impossible car $(E, N) \in [0,9]$

IV.3.b Reprenons la 2ième équation de la 3ième colonne

$$\begin{cases} 1 + T + R + N = 10 + U \\ T + R = 8 \end{cases}$$

↳ $1 + 8 + N = 10 + U$

↳ $\boxed{N = U + 1}$

			2	1	1	1	
	J	U	P	I	T	E	R
+	S	A	T	U	R	N	E
+		U	R	A	N	U	S
	N	E	P	T	U	N	E
	7	6	5	4	3	2	1

IV.3.c Reprenons la 3ième équation de la 3ième colonne

$$\begin{cases} 1 + T + R + N = 20 + U \\ T + R = 8 \end{cases}$$

↳ $1 + 8 + N = 20 + U$

↳ $N = 11 + U$ impossible car $N \in [0,9]$

			2	2	1	1	
	J	U	P	I	T	E	R
+	S	A	T	U	R	N	E
+		U	R	A	N	U	S
	N	E	P	T	U	N	E
	7	6	5	4	3	2	1

Conclusion :

$T + R = 10$ ⇨ Il n'y a pas de solution

$T + R = 9$ ⇨ Il n'y a pas de solution

$T + R = 8$ ⇨ il y a une solution à la condition suivante

$N = U + 1$

V. Propriété 7ième Colonne

Comme $J + S = N$ et $(J, S, N) \neq 0$

Alors $\mathbf{N \geq 3}$

			2	1	1	1	
	J	U	P	I	T	E	R
+	S	A	T	U	R	N	E
+		U	R	A	N	U	S
	N	E	P	T	U	N	E
	7	6	5	4	3	2	1

<u>VI. Propriété 6^{ième} Colonne</u>

La 5^{ième} colonne (T + R = 8 avec une retenue de 2) oblige <u>une retenue sur la 6^{ième} colonne</u> de <u>1</u>.

Il y a donc 3 équations possibles :

α)	1 + 2U + A = E	
β)	1 + 2U + A = 10 + E	dans ce cas il y a une <u>retenue de 1</u> sur la <u>7^{ième} colonne</u>
γ)	1 + 2U + A = 20 + E	dans ce cas il y a une <u>retenue de 2</u> sur la <u>7^{ième} colonne</u>

<u>**VI.1** Résolution avec l'équation α (1 + 2U + A = E)</u>

Résolvons cette équation avec celle déduite du § II.

$$\begin{array}{cccccccc} & & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & \\ & J & U & P & I & T & E & R \\ + & S & A & T & U & R & N & E \\ + & & U & R & A & N & U & S \\ \hline & N & E & P & T & U & N & E \\ & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 1 + 2U + A = E \\ E + U = 9 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} 1 + 2U + A = E \\ E = 9 - U \end{array}\right.$$

↳ 1 + 2U + A = 9 – U

↳ 1 + 3U + A = 9

↳ A = 8 – 3U

Ainsi U peux prendre les valeurs suivantes avec A ∈ [0,9] :

U= 0, 1, 2

Selon le § **IV.3.b** nous savons que N = U + 1

Donc	si U = 0	N = 1	<u>impossible</u> car N ≥ 3
	si U = 1	N = 2	<u>impossible</u> car N ≥ 3
	si U = 2	N = 3	

<u>**VI.1.a** Résolution avec U = 2, N = 3</u>

Nous avons A = 8 – 3U

A = 2 ➔ <u>impossible</u> car A = U

VI.2 Résolution avec l'équation β (1 + 2U + A = 10 + E)

	1	1	2	1	1	1	
	J	U	P	I	T	E	R
+	S	A	T	U	R	N	E
+		U	R	A	N	U	S
	N	E	P	T	U	N	E
	7	6	5	4	3	2	1

Résolvons cette équation avec celle déduite du § II.

$$\begin{cases} 1 + 2U + A = 10 + E \\ E + U = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + 2U + A = 10 + E \\ E = 9 - U \end{cases}$$

↳ $1 + 2U + A = 10 + (9 - U)$

↳ $1 + 3U + A = 19$

↳ $A = 18 - 3U$

Ainsi U peux prendre les valeurs suivantes avec $A \in [0,9]$:

U= 3, 4, 5, 6

Selon le § **IV.3.b** nous savons que $N = U + 1$

Donc si U = 3 N = 4
si U = 4 N = 5
si U = 5 N = 6
si U = 6 N = 7

VI.2.a Résolution avec U = 3, N = 4

Nous avons $E = 9 - U$ → $E = 6$

Aussi $A = 18 - 3U$ → $A = 9$

Selon § **VI** (β) nous avons une retenue de 1 sur la 7ième colonne
Comme N = 4 nous avons pour J et S [avec $(J, S) \neq 0$ et $1+J+S=N$] :
(J, S) = (1,2) ou (2,1)

Selon § **IV.3** → $T + R = 8$

(T, R) = (0,8) ou (8,0)

1er cas R = 0, T = 8

selon § **I** → $R + S = 10$ → $S = 10 - R$

soit S = 10 impossible car S doit être = à 1 ou 2

2ième cas R = 8, T = 0

selon § **I** → $R + S = 10$ → $S = 10 - R$

soit S = 2 de fait J = 1

Nous avons donc :

T=0, J=1, S=2, U=3, N=4,   , E=6,   ,R=8, A=9

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & \\
 & 1 & 3 & P & I & 0 & 6 & 8 \\
+ & 2 & 9 & 0 & 3 & 8 & 4 & 6 \\
+ & & 3 & 8 & 9 & 4 & 3 & 2 \\
\hline
 & 4 & 6 & P & 0 & 3 & 4 & 6
\end{array}
$$

Nous déduisons I dans la 4ième colonne

3 + 9 = 12 pour aller à 20 moins la retenue de 1

I = 20 – 12 – 1

I = 7

Nous déduisons P comme étant le dernier chiffre possible à savoir P=5

Nous avons pour solution :

T=0, J=1, S=2, U=3, N=4, P=5, E=6, I=7,R=8, A=9

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & \\
 & 1 & 3 & 5 & 7 & 0 & 6 & 8 \\
+ & 2 & 9 & 0 & 3 & 8 & 4 & 6 \\
+ & & 3 & 8 & 9 & 4 & 3 & 2 \\
\hline
 & 4 & 6 & 5 & 0 & 3 & 4 & 6
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{cccccccc}
 & J & U & P & I & T & E & R \\
+ & S & A & T & U & R & N & E \\
+ & & U & R & A & N & U & S \\
\hline
 & N & E & P & T & U & N & E
\end{array}
$$

VI.2.b <u>Résolution avec U = 4, N = 5</u>

Nous avons E = 9 – U ➔ E = 5   <u>impossible</u> car E = N

VI.2.c Résolution avec U = 5, N = 6

	1	1	2	1	1	1	
	J	U	P	I	T	E	R
+	S	A	T	U	R	N	E
+		U	R	A	N	U	S
	N	E	P	T	U	N	E
	7	6	5	4	3	2	1

Nous avons E = 9 – U → E = 4

Aussi A = 18 – 3U → A = 3

Selon § **VI** (β) nous avons une retenue de 1 sur la 7$^{\text{ième}}$ colonne
Comme N = 6 nous avons pour J et S [avec (J, S) ≠ 0 et 1+J+S=N] :

(J, S) → pas de solution

VI.2.d Résolution avec U = 6, N = 7

Nous avons E = 9 – U → E = 3

Aussi A = 18 – 3U → A = 0

Selon § **VI** (β) nous avons une retenue de 1 sur la 7$^{\text{ième}}$ colonne
Comme N = 7 nous avons pour J et S [avec (J, S) ≠ 0 et 1+J+S=N] :

(J, S) = (1,5) ou (5,1)

(J, S) = (2,4) ou (4,2)

1$^{\text{er}}$ Cas (J, S) = (1,5) ou (5,1)

Rappelons que A=0, E=3, U=6, N=7
Selon § **IV.3** → T + R = 8

(T, R) → pas de solution

2$^{\text{ième}}$ Cas (J, S) = (2,4) ou (4,2)

Rappelons que A=0, E=3, U=6, N=7
Selon § **IV.3** → T + R = 8

(T, R) → pas de solution

VI.3 Résolution avec l'équation γ (1 + 2U + A = 20 + E)

	2	1	2	1	1	1	
	J	U	P	I	T	E	R
+	S	A	T	U	R	N	E
+		U	R	A	N	U	S
	N	E	P	T	U	N	E
	7	6	5	4	3	2	1

Résolvons cette équation avec celle déduite du § II.

$$\begin{cases} 1 + 2U + A = 20 + E \\ E + U = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + 2U + A = 20 + E \\ E = 9 - U \end{cases}$$

↳ $1 + 2U + A = 20 + (9 - U)$

↳ $1 + 3U + A = 29$

↳ $A = 28 - 3U$

Ainsi U peux prendre les valeurs suivantes avec $A \in [0,9]$:

U= 7, 8, 9

Selon le § **IV.3.b** nous savons que $N = U + 1$

Donc si U = 7 N = 8
si U = 8 N = 9
si U = 9 N = 10 <u>impossible</u> car $N \in [0,9]$

VI.3.a Résolution avec U = 7, N = 8

Nous avons E = 9 – U → E = 2

Aussi A = 28 – 3U → A = 7 <u>impossible</u> car A = U

VI.3.b Résolution avec U = 8, N = 9

Nous avons E = 9 – U → E = 1

Aussi A = 28 – 3U → A = 1 <u>impossible</u> car A = E